1　ケプラーの第2法則

地球の公転の軌道は太陽を焦点とした楕円であり, 月の軌道は地球を中心とした円を描くとする。なお, 地球はケプラーの第2法則を満たしながら公転するため, 角速度は一定ではない。そこで, ケプラーの第2法則から時間と離心近点角 θ の関係式を求め, 時間 t を与えることにより地球の位置を求める方法を紹介する。

1.1　ケプラー方程式

1.1.1　太陽と地球の座標と離心近点角

地球は太陽の周りを公転している。地球の公転軌道は太陽を焦点とした楕円となる（ケプラーの第1法則）。また, 地球と太陽を結ぶ線分が単位時間に描く面積は一定である（ケプラーの第2法則）。xy 平面を公転面とし, 楕円の長軸を x 軸, 短軸を y 軸と重ねる。また, 太陽を焦点 C$(c,\ 0)$ におく。また長軸の長さを $2a$, 短軸の長さを $2b$ とすると, 楕円の方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と表すことができる。また, 地球の位置 P は媒介変数 θ を用いて $x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$ と表すことができる。また, 原点 O を中心とした円と, P を通り x 軸と垂直な直線の共有点 Q を考える（Q は P と同じ側にとる)。$\angle$QOA は「離心近点角」と呼ばれている。$\angle\mathrm{QOA}=\theta$ とおく。(図 1)

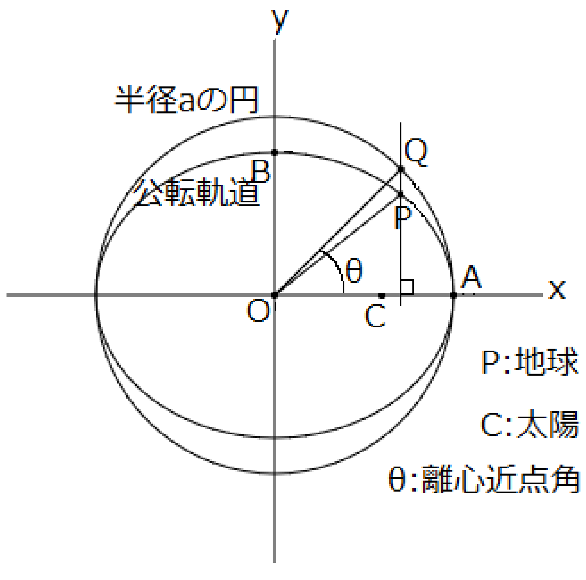

図 1: 離心近点角

1.1.2　ケプラー方程式

地球 P が始線 OX を通った時刻を $t = 0$ とする。太陽 C と地球 P を結ぶ線分 CP が時刻 t までに描く図形の面積を $S(t)$ とする。(図 2)

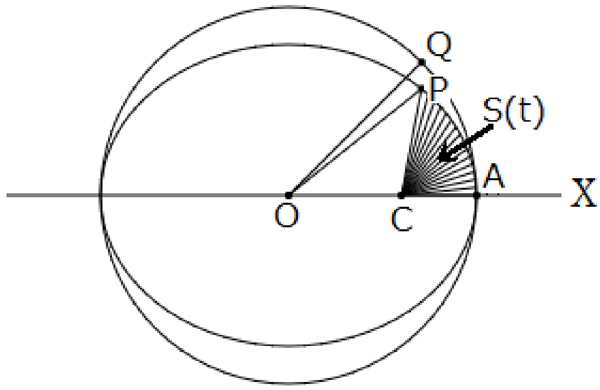

図 2: CP が描く図形の面積 S(t)

ケプラーの第 2 法則より面積速度は一定のため, S(t) は次のように表すことができる。

$$S(t) = S \times \frac{t}{\mathrm{T}} = \frac{ab\pi}{\mathrm{T}} t$$

また 変形扇型 POA の面積を S_1, $\triangle POC$ の面積を S_2 とすると, S_1, S_2 は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} S_1 &= a^2\pi \times \frac{\theta}{2\pi} \times \frac{b}{a} = \frac{1}{2}ab\theta \\ S_2 &= \frac{1}{2}c \cdot b\sin\theta \end{aligned}$$

$S(t) = S_1 - S_2$ であるから,

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2}ab\theta - \frac{1}{2}c \cdot b\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}b(a\theta - c \cdot \sin\theta) \end{aligned}$$

(1),(2) より,

$$\begin{aligned} \frac{ab\pi}{\mathrm{T}} t &= \frac{1}{2}b(a\theta - c\sin\theta) \\ t &= \frac{\mathrm{T}}{ab\pi} \times \frac{1}{2}b(a\theta - c\sin\theta) \\ t &= \frac{\mathrm{T}}{2a\pi}(a\theta - c\sin\theta) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{\mathrm{T}}{2\pi}(\theta - \frac{c}{a}\sin\theta) \\
t &= \frac{\mathrm{T}}{2\pi}(\theta - \frac{c}{a}\sin\theta)
\end{aligned}
$$

ここで, $\dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \varepsilon$（離心率）であるから, 時間 t と離心近点角 θ の間には次の関係式が成り立つ。

ケプラー方程式

$$
t = \frac{\mathrm{T}}{2\pi}(\theta - \varepsilon\cdot\sin\theta)
$$

ここで $f(\theta) = \dfrac{\mathrm{T}}{2\pi}(\theta - \varepsilon\cdot\sin\theta)$ とすると $t = f(\theta)$ であり, $\theta = f^{-1}(t)$ となる。t が与えられたときの θ を解析的に求めることは非常に困難である。そこで, ニュートン法を用いて $t = k$ における$\theta = \alpha$ の近似を行うこととする。

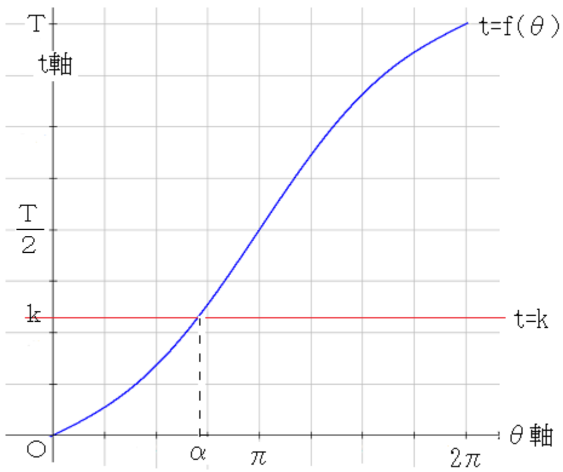

図 3: $t = f(\theta)$ のグラフ

1.1.3　ニュートン法による離心近点角の近似

ケプラー方程式に $t = k$ を代入して

$$k = \frac{\mathrm{T}}{2\pi}(\theta - \varepsilon \cdot \sin\theta)$$

$$\frac{\mathrm{T}}{2\pi}(\theta - \varepsilon \cdot \sin\theta) - k = 0$$

ここで,

$$g(\theta) = \frac{\mathrm{T}}{2\pi}(a - \varepsilon \cdot \sin a) - k$$

とおく。第一次導関数, 第二次導関数は次のようになる。

$$g'(\theta) = \frac{\mathrm{T}}{2\pi}(1 - \varepsilon \cdot \cos\theta)$$

$$g''(\theta) = \frac{\mathrm{T}}{2\pi}(\sin\theta)$$

最初に $0 \leqq \alpha \leqq \pi$ すなわち $0 \leqq\ k \leqq \frac{\mathrm{T}}{2}$ のとき, ニュートン法で α 求める。

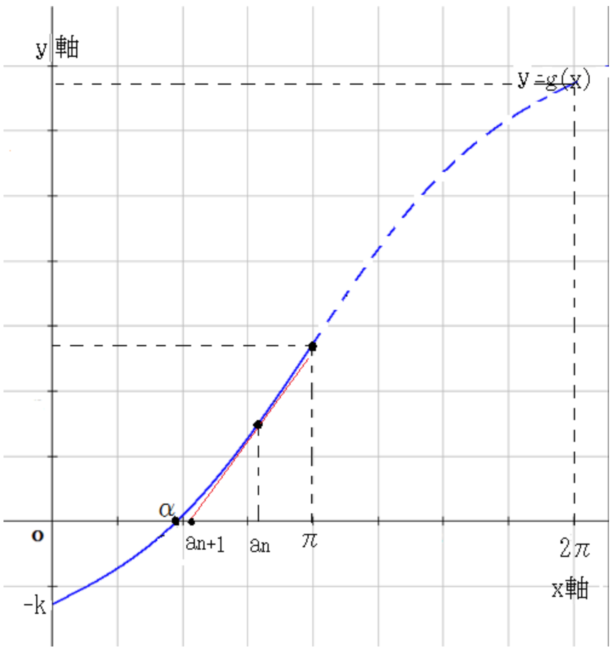

図 4: ニュートン法による近似

$y = g(\theta)$ における $x = a$ のときの接線の方程式は

$$y - g(a) = g'(a)(x - a)$$

となる。この接線と x 軸との交点の x 座標を求めるには, $y=0$ を代入すればよい。代入して整理すると,

$$x = a - \frac{g(a)}{g'(a)}$$

となる。したがって, ニュートン法による近似値の数列 $\{a_n\}$ の漸化式は次のようになる。

$$a_{n+1} = a_n - \frac{g(a_n)}{g'(a_n)}$$

数列 a_n は離心近点角 α に収束する。

次に, $t=k\ \ (\frac{\mathrm{T}}{2} < k < \mathrm{T})$ の場合について考える。

$$t = f(\theta)\ \ (0 \leqq\ t < \mathrm{T})$$

は $(\theta, t) = (\pi, \frac{T}{2})$ に関して点対称となる。したがって,$\frac{T}{2} < k < \mathrm{T}$ についての離心近点角 α' の値は $t = T - k$ のときの離心近点角 α を用いて

$$\alpha' = 2\pi - \alpha$$

と表すことができる。

離心近点角を求めるプログラム (JavaScript)

```
function kepler(k,T,e){  //k は時刻,T は周期,e は離心率
      if(k<=T/2){var theta=newton(k,T,e);}      // 0<=k=<T/2 の場合
      else{theta=2*Math.PI-newton(T-k,T,e);}      //  T/2<k<T の場合
      return theta;      }
}

function newton(k,T,e){  //ニュートン法で離心近点角の近似をする関数
var gx1=(T/(2*Math.PI))*(x-e*Math.sin(x))-k;  //g(x) を計算
var gx2=T/(2*Math.PI))*(1-e*Math.cos(x);    //g'(x) を計算
for(var i=0;i<10;i++){   //10 回ニュートン法を用いて近似
    xx=x-gx1/gx2;
    x=xx;
    }
return xx;
}
```

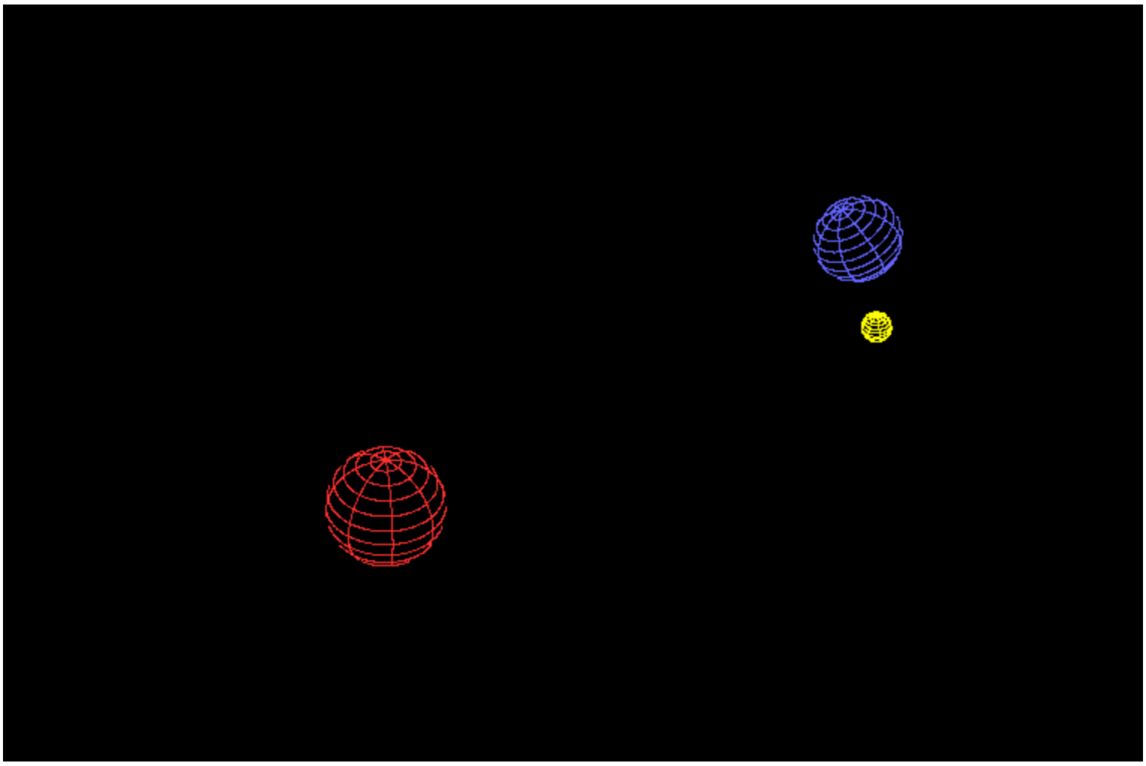

図 5: 太陽, 月, 地球を表示している画面